

Prozorske funkcije



1

Prozorske funkcije, kao što im ime i kaže, imaju zadatak da ograniče pojavu u odgovarajućem prozorskom intervalu.

U slučaju vremenskih signala, prozorska funkcija će omogućiti da se u analizu uvede samo tačno određeni vremenski deo signala.

$$y[n] = w[n]x[n] \quad w[n] \begin{cases} \neq 0 & 0 \leq n \leq N-1 \\ = 0 & \text{za ostalo } n \end{cases}$$
$$Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]w[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X[n]W[k-n]$$

Odmah uočiti da ako je signal periodičan, taj vremenski interval, ili prozor trebao da bude jednak periodičnosti funkcije. Ako nije videli smo da dolazi do curenje spektra.

Šta je osnovni problem?

Mi radimo odabiranje nekog signala da bi saznali njegove karakteristike.

Ne postoji matematički periodičan signal.

Mi smatramo da je periodičan u nekom vremenskom intervalu observacije.

Videli smo da DFT na sličan način posmatra i aperiodične signale.

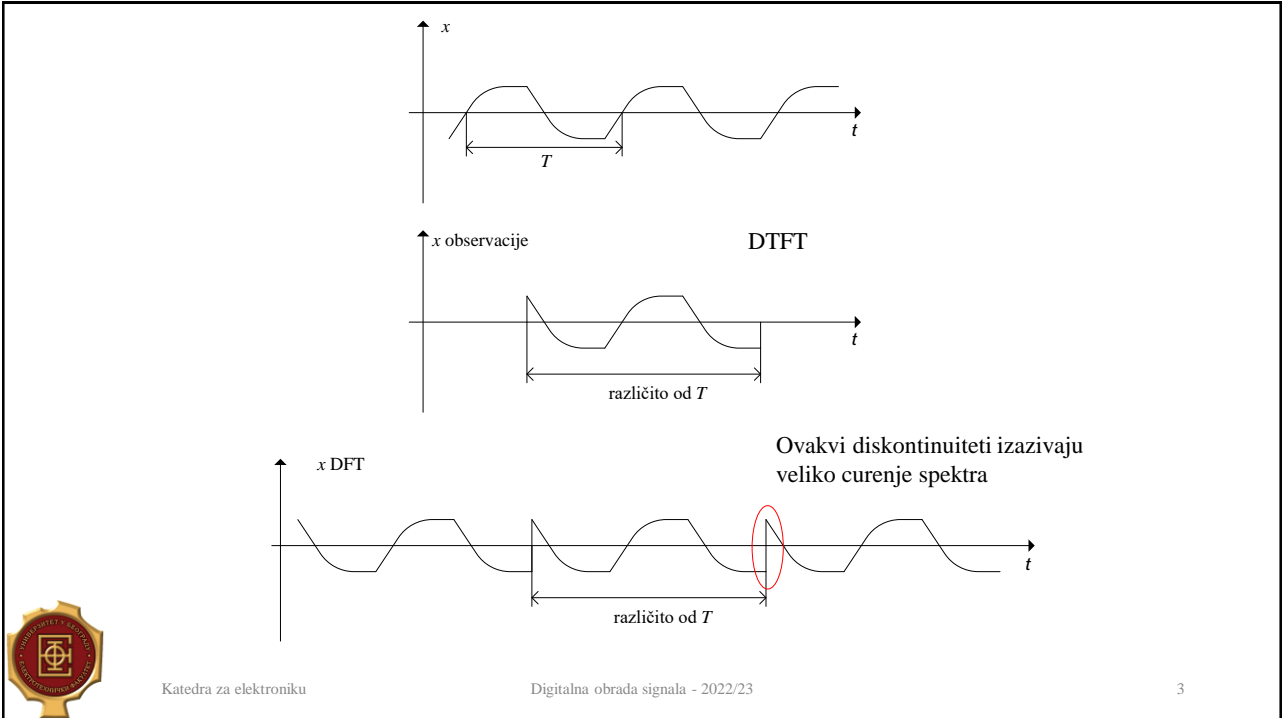
Teško, nemoguće, je obezbediti apsolutno koherentno odmeravanje, pogotovo ako ne poznajemo tačne učestanosti u signalu.

Biće „uvek“ curenja u spektru.

A tu se sada pojavljuju i neželjene komponente kao na primer šum, uvek prisutan.



2



3

Da ponovimo

Odabiramo učestanošću F_s kompleksni sinusni signal učestanosti F u N tačaka

$$x[n] = e^{j2\pi n \frac{F}{F_s}} \quad \frac{F}{F_s} = \frac{\chi}{N}$$

DTFT
$$X(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn2\pi \frac{\chi}{N}} e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn(2\pi \frac{\chi}{N} - \Omega)}$$

$$X(j\Omega) = \frac{1 - (e^{j(2\pi \frac{\chi}{N} - \Omega)})^N}{1 - e^{j(2\pi \frac{\chi}{N} - \Omega)}} = \frac{e^{j\frac{N}{2}(2\pi \frac{\chi}{N} - \Omega)} - e^{-j\frac{N}{2}(2\pi \frac{\chi}{N} - \Omega)}}{e^{j\frac{1}{2}(2\pi \frac{\chi}{N} - \Omega)} - e^{-j\frac{1}{2}(2\pi \frac{\chi}{N} - \Omega)}}$$

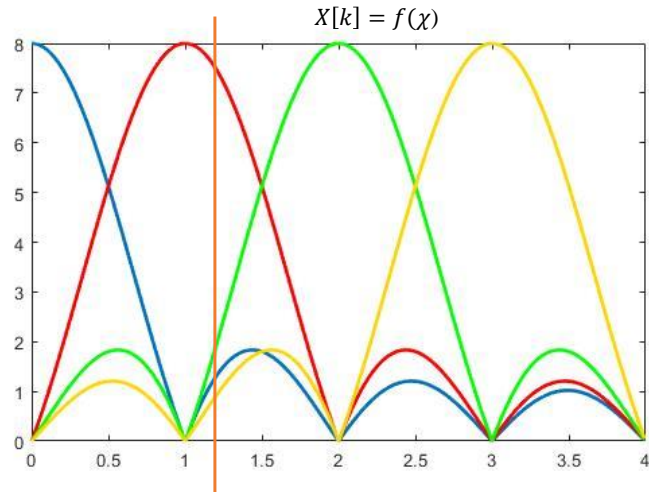
$$X(j\Omega) = N e^{j\frac{N-1}{2}(2\pi \frac{\chi}{N} - \Omega)} \frac{\text{sinc}\left(\frac{N}{2}(2\pi \frac{\chi}{N} - \Omega)\right)}{\text{sinc}\left(\frac{1}{2}(2\pi \frac{\chi}{N} - \Omega)\right)}$$

DFT
$$X\left[k \frac{2\pi}{N}\right] = X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi n \frac{\chi}{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn(2\pi \frac{\chi}{N} - k \frac{2\pi}{N})}$$

$$X[k] = N e^{j\frac{N-1}{2}(2\pi \frac{\chi}{N} - k \frac{2\pi}{N})} \frac{\text{sinc}\left(\frac{N}{2}(2\pi \frac{\chi}{N} - k \frac{2\pi}{N})\right)}{\text{sinc}\left(\frac{1}{2}(2\pi \frac{\chi}{N} - k \frac{2\pi}{N})\right)} = N e^{j\frac{N-1}{N}\pi(\chi - k)} \frac{\text{sinc}(\pi(\chi - k))}{\text{sinc}\left(\frac{\pi}{N}(\chi - k)\right)}$$


4

Curenje spektra
Scalloping loss



Harmonijska komponenta koja će se videti i na
0. harmoniku - plavo
1. harmoniku - crveno
2. harmoniku - zeleno
3. harmoniku - žuto

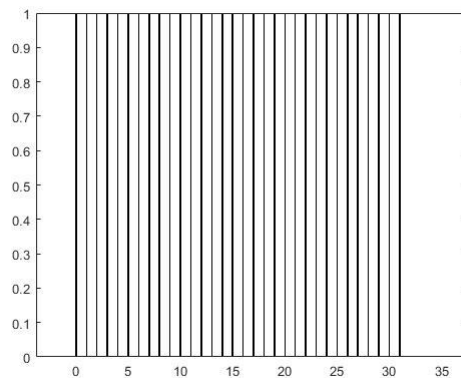


5

Već je koristili ali je nismo takvo zvali – „prirodna“ za konačan broj tačaka.

Pravougaona prozorska funkcija (Rectangular, Uniform)

$$w[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & \text{za ostalo } n \end{cases}$$



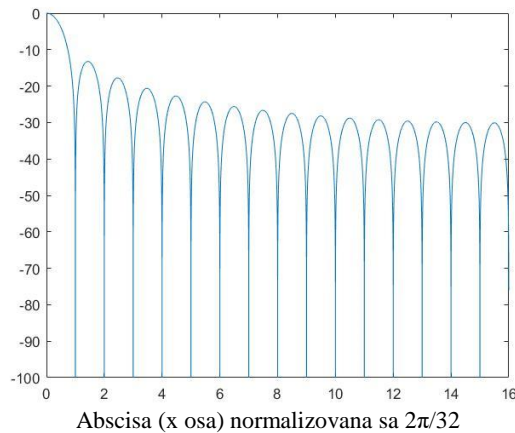
$N=32$



6

$$W(j\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} w[n] e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\Omega n} = N \cdot e^{-j\frac{N-1}{2}\Omega} \cdot \frac{\text{sinc}\left(\frac{N}{2}\Omega\right)}{\text{sinc}\left(\frac{1}{2}\Omega\right)}$$

Ordinata (y osa) u dB
Normalizovana na 0db



Digresija: Na ovakav način ćemo prikazivati i ostale prozorske funkcije $N=32$ i slabljenje u dB



Kao što se vidi, pravougaona prozorska funkcija ne vrši nikakvu modifikaciju ulaznog signala osim eventualnog odsecanja. To znači da svi do sada izvedeni rezultati važe i za pravougaonu prozorsku funkciju, pa im se na ovaj način može dati novo tumačenje.

Na slici je prikazana amplitudska karakteristika pravougaone prozorske funkcije. Širina glavnog luka u spektru pravougaone prozorske funkcije je $4\pi/N$. Osnovni nedostatak pravougaone prozorske funkcije je malo slabljenje bočnih lukova u amplitudskom spektru. Amplituda prvog bočnog luka iznosi 22% (-13 dB) od amplitude glavnog luka. Takođe, viši bočni lukovi opadaju sa nagibom od -6 dB/oktavi. Kada se formira konvolucija u spektralnom domenu između spektra prozorske funkcije i spektra ulaznog signala, zbog postojanja jakih bočnih lukova nastaje značajna modifikacija spektra ulaznog signala, tj. $Y[k] \neq X[k]$. Zbog ovakvih karakteristika pravougaone prozorske funkcije, direktna primena DFT na ulazni signal onemogućava detekciju slabih signala u prisustvu jačih signala.

Velika amplituda bočnih lukova u spektru pravougaone prozorske funkcije je posledica *naglog prekida sekvence* $w[n]$. Poznato je da sekvence koje imaju manje bočne lukove u spektru nemaju diskontinuitete u vremenskom domenu. U spektralnoj analizi, **projektovanju FIR sistema**, teoriji antenskih sistema kao i u mnogim drugim oblastima tehnike definisane su brojne prozorske funkcije, od kojih će neke biti opisane u narednom izlaganju. Sve dobre prozorske funkcije imaju postepen prelaz od centra prozorske funkcije prema krajevima



Važna napomena

Prozorske funkcije se primenjuju u različitim oblastima.

Prilikom analize signala po pravilu izrazi za prozorske funkcije treba da budu **periodični**. Tako će u narednom izlaganju i biti prikazane mnoge funkcije. Koriste se da bi se popravile frekventijske karakteristike DFT. „Smanjili“ efekti curenja spektra. Odmah uočite da mogu i da pokvare spektar u odgovarajućim situacijama.

U nekim drugim oblastima bitno je da izrazi za prozorske funkcije budu **simetrični**. Na primer u projektovanju FIR filtera.



Da bi se uporedile različite prozorske funkcije i definisale osobine

Množenje sa prozorskom funkcijom u vremenskom domenu će uticati na amplitude komponenti u frekventijskom domenu. Taj uticaj se definiše

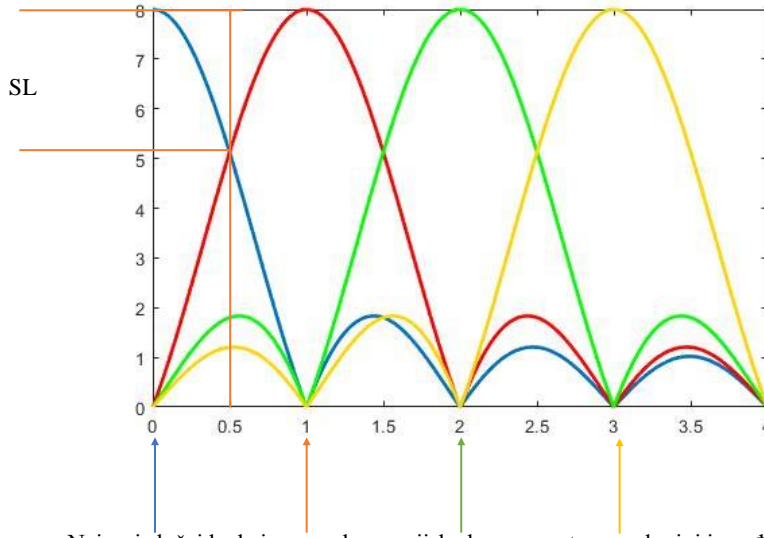
Koherentno pojačanje $CG = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w[n]$

U decibelima $CG_{dB} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w[n] \right)$



Scalloping loss

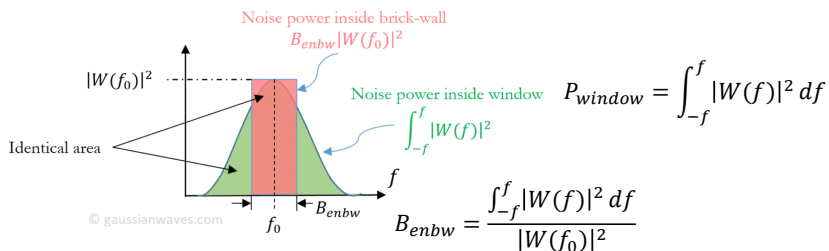
$$SL = \frac{\left| \sum_{n=0}^{N-1} w[n] e^{-j\frac{\pi n}{N}} \right|}{\sum_{n=0}^{N-1} w[n]} = \frac{W(\Omega_{k=1/2})}{W(0)}$$



Najgori slučaj kada je prava harmonijska komponenta na polovini između dva bina



$$P_{brick-wall} = B_{enbw} |W(f_0)|^2 = P_{window}$$



Ekvivalentni propusni opseg šuma

$$ENBW = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} |W[k]|^2}{|W[k_0]|^2} \xleftrightarrow{\text{Parseval}} N \frac{\sum_{n=0}^{N-1} |w[n]|^2}{\left| \sum_{n=0}^{N-1} w[n] \right|^2}$$

k_0 gdje je maksimum DFTa (za prozorske $k_0=0$)



Trougaona ili Bartlettova prozorska funkcija (Bartlett)

$$w[n] = \begin{cases} \frac{2n}{N} & n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} \\ w[N-n] & n = \frac{N}{2} + 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad W(j\Omega) = \frac{N}{2} e^{-j\frac{N-1}{2}\Omega} \left(\frac{\text{sinc}\left(\frac{N}{4}\Omega\right)}{\text{sinc}\left(\frac{1}{2}\Omega\right)} \right)^2$$

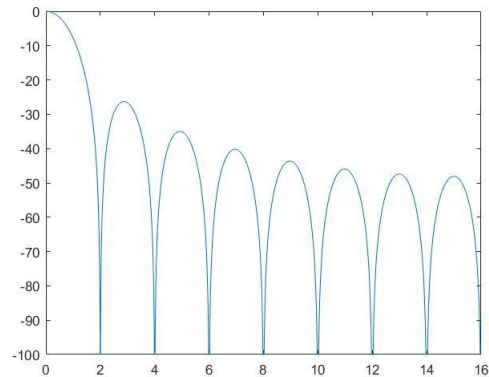
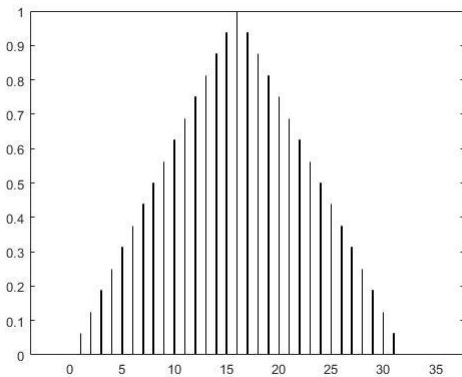
Uočiti da je izraz **periodičan** i da je ukupan broj odmeraka N .

$$w[0] \neq w[N-1]$$

Da nam je trebao **simetričan**

$$w[n] = \begin{cases} \frac{2n}{N} & n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} \\ w[N-n] & n = \frac{N}{2} + 1, \dots, N \end{cases}$$

$w[0] = w[N]$ i ukupan broj odmeraka je $N+1$



Amplitudski spektar trougaone prozorske funkcije predstavlja kvadrat amplitudskog spektra pravougaone prozorske funkcije. Ovaj rezultat nije neočekivan jer se trougaona prozorska funkcija može shvatiti i kao rezultat konvolucije dve pravougaone prozorske funkcije dužine $N/2$, pri čemu je poslednja tačka rezultata zanemarena. Kako konvoluciji u vremenskom domenu odgovara proizvod Furijeovih transformacija, dobijeni rezultat ima jasno tumačenje. Kao rezultat, maksimalna amplituda bočnih lukova je -26 dB ispod amplitude glavnog luka, dok je širina glavnog luka udvostručena. Maksimalno "scaloping" slabljenje koje se javlja na sredini između dva odbirka u spektralnom domenu iznosi -1.82 dB. Bočni lukovi opadaju sa nagibom od -12 dB/oktavi.



Da bi se još više smanjili bočni lukovi *potrebno je napraviti još blaži prelaz u blizini krajeva prozorske funkcije*. To se može postići korišćenjem kosinusnih (sinusnih) funkcija oblika $\cos^\alpha x$ ili $\sin^\alpha x$. Razlike između prozorskih funkcija kosinusnog i sinusnog tipa su u vremenskom pomeraju za polovinu dužine sekvence i u tome što je kosinusna funkcija simetrična u odnosu na koordinatni početak.

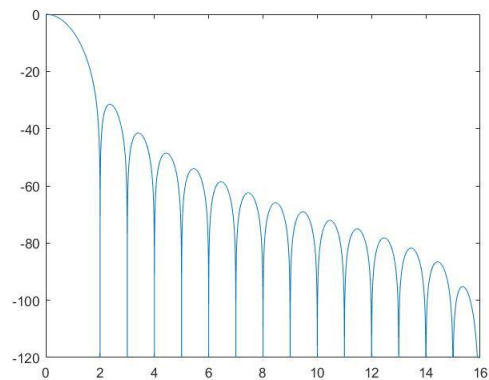
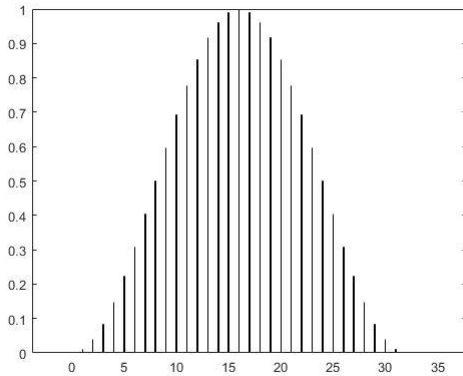
Hanova prozorska funkcija (Hann)

$$w[n] = \sin^2\left(\frac{n\pi}{N}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{N}\right)\right)$$

$$W(j\Omega) = \frac{1}{2}W_R(j\Omega) - \frac{1}{4}\left(W_R\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}\right)\right) + W_R\left(j\left(\Omega + \frac{2\pi}{N}\right)\right)\right)$$

$W_R(j\Omega)$ spektar pravougaone prozorske funkcije

$$W_R(j\Omega) = N \cdot e^{-j\frac{N-1}{2}\Omega} \cdot \frac{\text{sinc}\left(\frac{N}{2}\Omega\right)}{\text{sinc}\left(\frac{1}{2}\Omega\right)}$$



Iz izraza za Hanovu prozorsku funkciju se vidi da je $w[n] = 0$ na krajevima intervala, tj. Hanova prozorska funkcija nema diskontinuitete na krajevima. Zbog glatkog prelaza sa nenulnih na nulte vrednosti prozorske funkcije, spektar prozorske funkcije ima znatno manje bočne lukove koji opadaju sa -18 dB/oktavi. Amplituda najvećeg bočnog luka potisnuta je za -32 dB u odnosu na amplitudu centralnog luka. Širina centralnog luka iznosi $8\pi/N$



Hanova prozorska funkcija ima vrlo interesantnu interpretaciju u frekvencijskom domenu. Iz izraza za spektar se vidi da spektar Hanove prozorske funkcije predstavlja superpoziciju spektra pravougaonog prozora pomnoženog sa faktorom 0.5, i spektara pravougaonih prozora pomerenih za $\pm 2\pi/N$ i pomnoženih sa -0.25. Interesantno je da se maksimumi pomerenih spektara nalaze na mestima gde centralni spektar ima nule. Ovakvo sumiranje tri spektra ima za cilj da smanji amplitudu prvog bočnog luka. Međutim, ova spektralna interpretacija ima i vrlo važnu praktičnu primenu. Naime, kada se određuje DFT, iz spektra hanove funkcije se uzimaju odbirci sa frekvencijskim razmakom $2\pi/N$, odnosno, tačno na mestima gde se nalaze nule spektra. Dakle, u rezultatnom spektru postoje samo tri nenulta odbirka na pozicijama $-2\pi/N, 0$ i $2\pi/N$,

odnosno, na mestima gde leže centralni odbirci tri spektra koji ulaze u superpoziciju. Direktna primena uočene pojave omogućava da se množenje u vremenskom domenu sa Hanovom prozorskom funkcijom zameni superpozicijom spektara u frekvencijskom domenu. Dakle, spektar signala ograničenog Hanovom prozorskom funkcijom $Y[k]$ dobija se ako se nađe spektar signala bez množenja sa prozorskom funkcijom $X[k]$ i primeni formula:

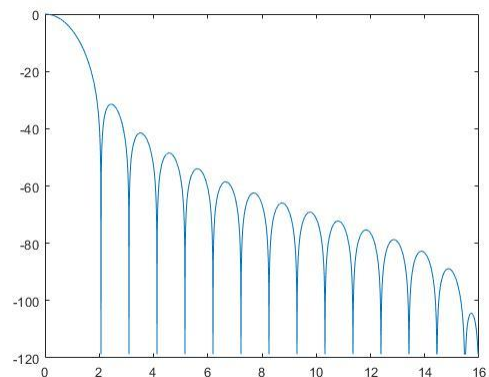
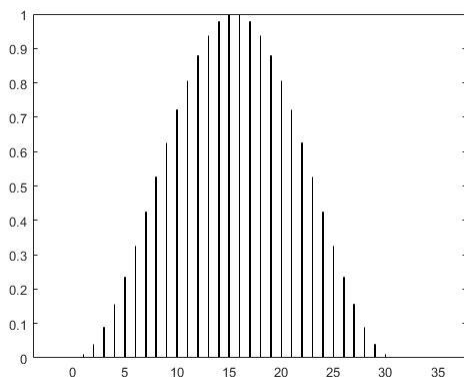
$$Y[k] = \frac{1}{2} \left(X[k] - \frac{1}{2} (X[k-1] + X[k+1]) \right)$$

za svaki DFT odbirak. Kako se superpozicioni koeficijenti $\pm 1/2$ lako realizuju pomeranjem udesno, a ne množenjem, vidi se da se N realnih množenja u vremenskom domenu zamenjuje sa $2N$ realnih sabiranja i $2N$ pomeraja udesno u spektralnom domenu. Takođe se smanjuje memorijski prostor jer nije potrebno čuvati vrednosti odbiraka prozorske funkcije. U nekim slučajevima, izračunavanje spektra na ovaj način može predstavljati značajno ubrzanje.

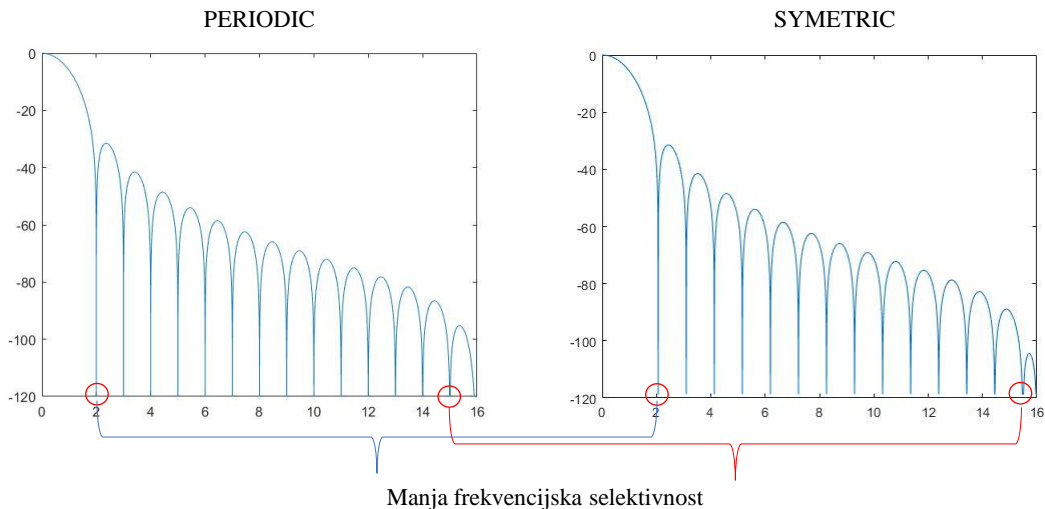


PERIODIC vs SYMETRIC

Simetrična Hanova prozorska funkcija



PERIODIC vs SYMETRIC



PERIODIC vs SYMETRIC

Postoje prozorske funkcije čiji su izrazi simetrični („teško ih izraziti u periodičnom obliku“ – gube se neka njihova svojstva). Po pravili ih koristimo kada nam nije toliko bitna frekvencijska selektivnost (da li ima i gde su nule bočnih lukova) nego neke druge osobine.

Kod simetrične Hanove prozorske nule su na krajevima.
Primer koji važi u ovim slučajevima: Računa se simetrična Hanova prozorska funkcija u $N+1$ tački i odbacuje poslednja nula pa se dobija periodična Hanova prozorska funkcija u N tačaka.

Ako simetrična prozorska funkcija nema nule na krajevima, odbacivanjem poslednjeg odmerka „pokvariće“ se osobine prozorske funkcije pogotovo ako je dobijena optimizacijom u frekvencijskom domenu.

Alternativni način je da se prozorska funkcija izračuna u manjem broju tačaka a da se onda napravi njeno periodično produženje dodavanjem nula. Uočiti da se na način ne menja frekvencijska rezolucija originalno računane prozorske funkcije.



Hemingova prozorska funkcija (Hamming)

Hemingova (Hamming) prozorska funkcija predstavlja poboljšanu verziju Hanove prozorske funkcije. Osnovni cilj poboljšanja je dalje smanjenje bočnih lukova.

$$w[n] = \alpha_H - (1 - \alpha_H) \cos\left(\frac{2n\pi}{N}\right)$$

$$W(j\Omega) = \alpha_H W_R(j\Omega) - \frac{(1 - \alpha_H)}{2} \left(W_R\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi}{N}\right)\right) + W_R\left(j\left(\Omega + \frac{2\pi}{N}\right)\right) \right)$$

$W_R(j\Omega)$ spektar pravougaone prozorske funkcije

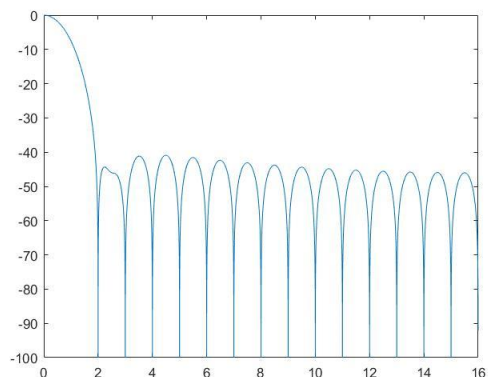
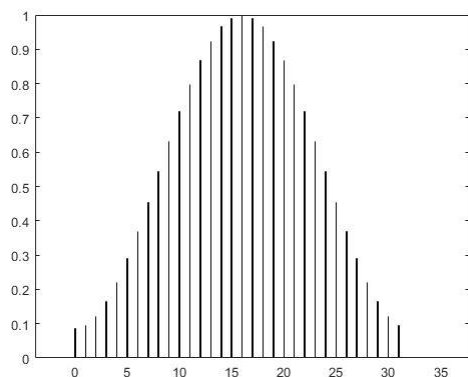
$$W_R(j\Omega) = N \cdot e^{-j\frac{N-1}{2}\Omega} \cdot \frac{\text{sinc}\left(\frac{N}{2}\Omega\right)}{\text{sinc}\left(\frac{1}{2}\Omega\right)}$$

Uočiti za $\alpha_H = \frac{1}{2}$ dobija se Hanova prozorska funkcija

može se izračunavanjem utvrditi: prvi bočni luk se može potpuno eliminisati ako je

$$\alpha_H = 25/46 = 0.543478261 \approx 0.54$$

Za ovu vrednost parametra α_H generalizovana prozorska funkcija naziva se Hemingova prozorska funkcija.



Maksimalna amplituda bočnih lukova sada iznosi -43 dB. Zbog toga što kod Hemingove prozorske funkcije postoji mali diskontinuitet na krajevima (0.08), bočni lukovi opadaju sa nagibom od samo -6 dB/oktavi.

Širina centralnog luka praktično je ista kao kod Hanove prozorske funkcije.



Blekmanova prozorska funkcija (Blackman)

Ideje koje su korišćene u razvoju Hanove i Hemingove kombinovane su u razvoju Blekmanove prozorske funkcije. U opštem obliku sve prozorske funkcije kosinusnog tipa su oblika

$$w[n] = \sum_{m=0}^M (-1)^m a_m \cos\left(\frac{2\pi mn}{N}\right)$$

$$W(j\Omega) = \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{a_m}{2} \left(W_R\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi m}{N}\right)\right) + W_R\left(j\left(\Omega + \frac{2\pi m}{N}\right)\right) \right)$$

$W_R(j\Omega)$ spektar pravougaone prozorske funkcije

$$W_R(j\Omega) = N \cdot e^{-j\frac{N-1}{2}\Omega} \cdot \frac{\text{sinc}\left(\frac{N}{2}\Omega\right)}{\text{sinc}\left(\frac{1}{2}\Omega\right)}$$

Može se uočiti da ovoj klasi pripadaju i prethodno opisane Hanova i Hemingova prozorska funkcija ($M = 1$). Još bolji rezultati se mogu dobiti sumiranjem tri ($M = 2$) ili četiri člana ($M = 3$) člana.



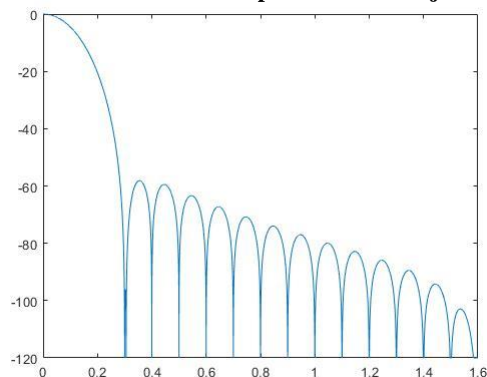
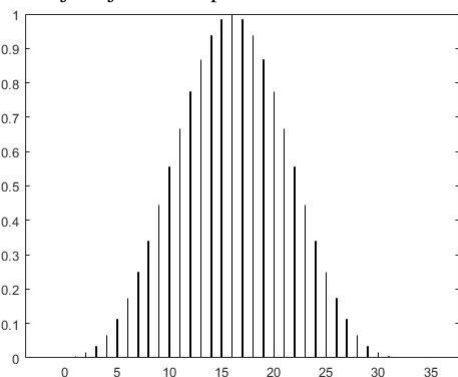
Na primer, za $M = 2$, postavljanjem nula funkcije na učestanosti $\omega = 7\pi/N$ i $9\pi/N$ koje odgovaraju položajima maksimuma trećeg i četvrtog bočnog luka pravougaone prozorske funkcije, dobijaju se sledeće vrednosti za koeficijente:

$$a_0 = 7938/18608 \approx 0.42$$

$$a_1 = 9240/18608 \approx 0.50$$

$$a_2 = 1430/18608 \approx 0.08$$

Prozorska funkcija koja koristi aproksimativne vrednosti koeficijenata naziva se **Blekmanova prozorska funkcija**



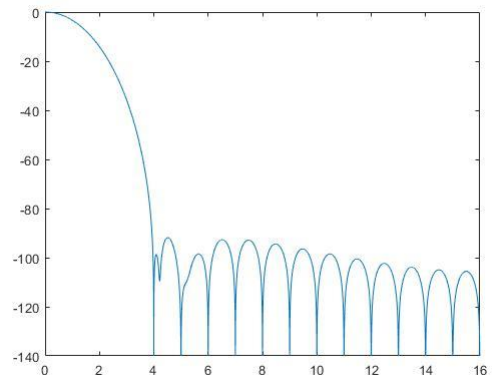
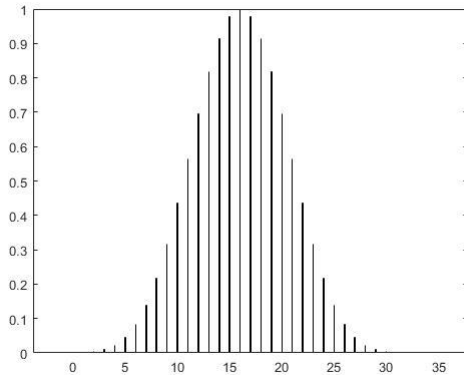
Slabljenje bočnih lukova je -58 dB, a strmina opadanja bočnih lukova je -18 dB/oktavi. Ovako dobre karakteristike u pogledu slabljenja postignute su po cenu povećanja širine glavnog luka na $12 \pi/N$



Blekman – Haris prozorska funkcija (Blackman–Harris)

$$w[n] = a_0 - a_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right) - a_3 \cos\left(\frac{6\pi n}{N}\right)$$

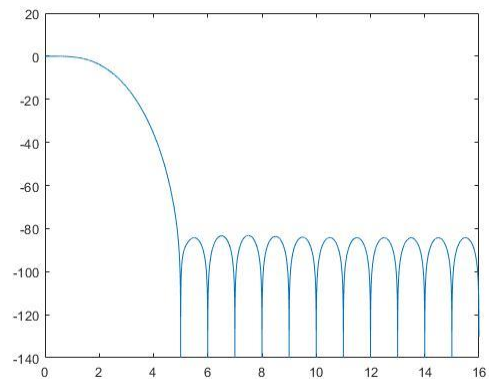
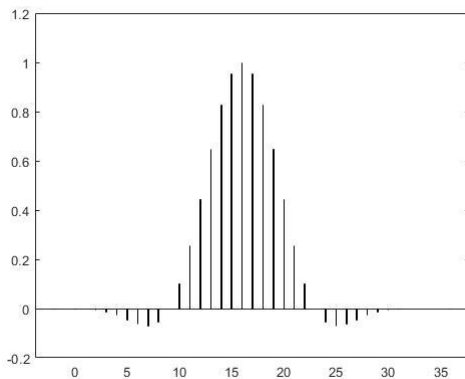
$$a_0 = 0.35875, \quad a_1 = 0.48829, \quad a_2 = 0.14128, \quad a_3 = 0.01168$$



Flat top prozorska funkcija

$$w[n] = a_0 - a_1 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + a_2 \cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right) - a_3 \cos\left(\frac{6\pi n}{N}\right) + a_4 \cos\left(\frac{8\pi n}{N}\right)$$

$$a_0 = 0.21557895, \quad a_1 = 0.41663158, \quad a_2 = 0.277263158, \quad a_3 = 0.083578947, \quad a_4 = 0.006947368$$



Minimalan „Scalloping loss“



Kajzerova prozorska funkcija (Kaiser)

Problem konstruisanja dobre prozorske funkcije svodi se na matematički problem određivanja vremenski ograničene funkcije koja ima minimalnu energiju izvan nekog izabranog opsega učestanosti.

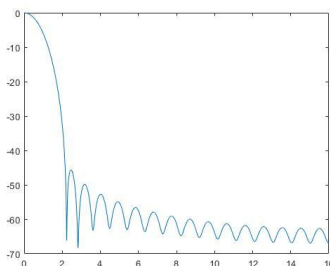
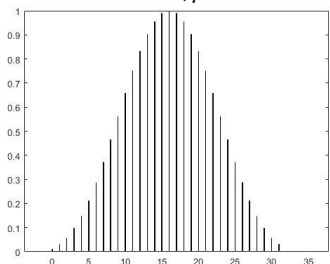
Kajzerova ili Kajzer-Beselova (Kaiser-Bessel) prozorska funkcija predstavlja jednostavnu diskretnu aproksimaciju funkcije ograničenog trajanja T_K koja maksimizira energiju sadržanu u opsegu učestanosti B_K pomoću modifikovane Beselove funkcije prve vrste nultog reda $I_0(x)$

$$w[n] = \frac{I_0\left(\beta\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2n}{N}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)} \quad I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \frac{1}{k!^2}$$

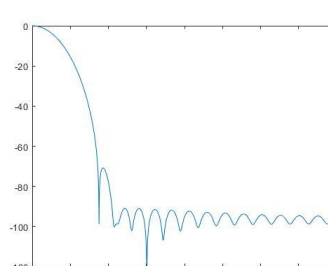
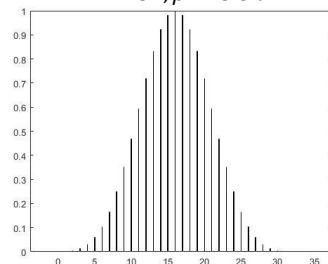
gde je parametar $\beta = 0.5T_K B_K$. Kontinualnom promenom parametra β može se povećavati slabljenje bočnih lukova na račun proširenja glavnog luka. Kod prethodno opisanih prozorskih funkcija to je bilo moguće samo promenom dužine prozorske funkcije N što nije dovoljno fleksibilno. Tipične vrednosti parametra β leže u intervalu $4 \leq \beta \leq 10$.



$N = 32, \beta = 2\pi$



$N = 32, \beta = 3.5\pi$



U praktičnoj primeni Kajzerove prozorske funkcije u spektralnoj analizi signala potrebno je, na osnovu zadatih zahteva za slabljenje bočnih lukova A_{sl} (od čega zavisi curenje spektra) i širine glavnog luka $\Delta\Omega_0$ (od čega zavisi sposobnost razdvajanja po frekvenciji), odrediti vrednosti karakterističnih parametara prozorske funkcije, β i N . Parametar β se određuje na osnovu empirijske formule:

$$\beta = \begin{cases} 0 & A_{sl} \leq 13.26 \text{ dB} \\ 0.76609(A_{sl} - 13.26)^{0.4} + 0.09834(A_{sl} - 13.26) & 13.26 \text{ dB} < A_{sl} \leq 60 \text{ dB} \\ 0.12438(A_{sl} + 6.3) & 60 \text{ dB} < A_{sl} \leq 120 \text{ dB} \end{cases}$$

gde $A_{sl} = 13.26$ dB odgovara slabljenju pravougaone prozorske funkcije na koju se svodi Kajzerova prozorska funkcija za $\beta = 0$. Prozorska funkcija projektovana za vrednost β imaće slabljenje bočnih lukova koje odstupa od A_{sl} najviše za 0.36%. Optimalna vrednost N se takođe može proceniti iz empirijske formule

$$N \approx \frac{24\pi(A_{sl} + 12)}{155 \cdot \Delta\Omega_0} + 1$$

Dakle, Kajzerova prozorska funkcija predstavlja pogodan metod za ograničenje dužine ulazne sekvence čiji spektar treba odrediti, kojim se na optimalan način ostvaruje kompromis između dužine sekvence, frekvencijske rezolucije i curenja spektra.



Dolf-Čebiševljeva prozorska funkcija (Dolph-Chebyshev)

Problem određivanja optimalne prozorske funkcije može se matematički postaviti i na drugačiji način kao optimizacioni problem određivanja prozorske funkcije čiji

centralni luk ima minimalnu širinu za zadato slabljenje bočnih lukova.

Optimizacija se radi u spektralnom domenu pa su odbirci **spektra**

$$W[k] = \frac{T_N\left(\beta \cos\left(\frac{\pi k}{N+1}\right)\right)}{T_N(\beta)}$$

Čebiševljevi polinomi prve vrste

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

...

$$\beta = \cosh\left(\frac{1}{N} \cosh^{-1}(10^\alpha)\right)$$

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1}(x)) & |x| < 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1}(x)) & |x| > 1 \end{cases}$$

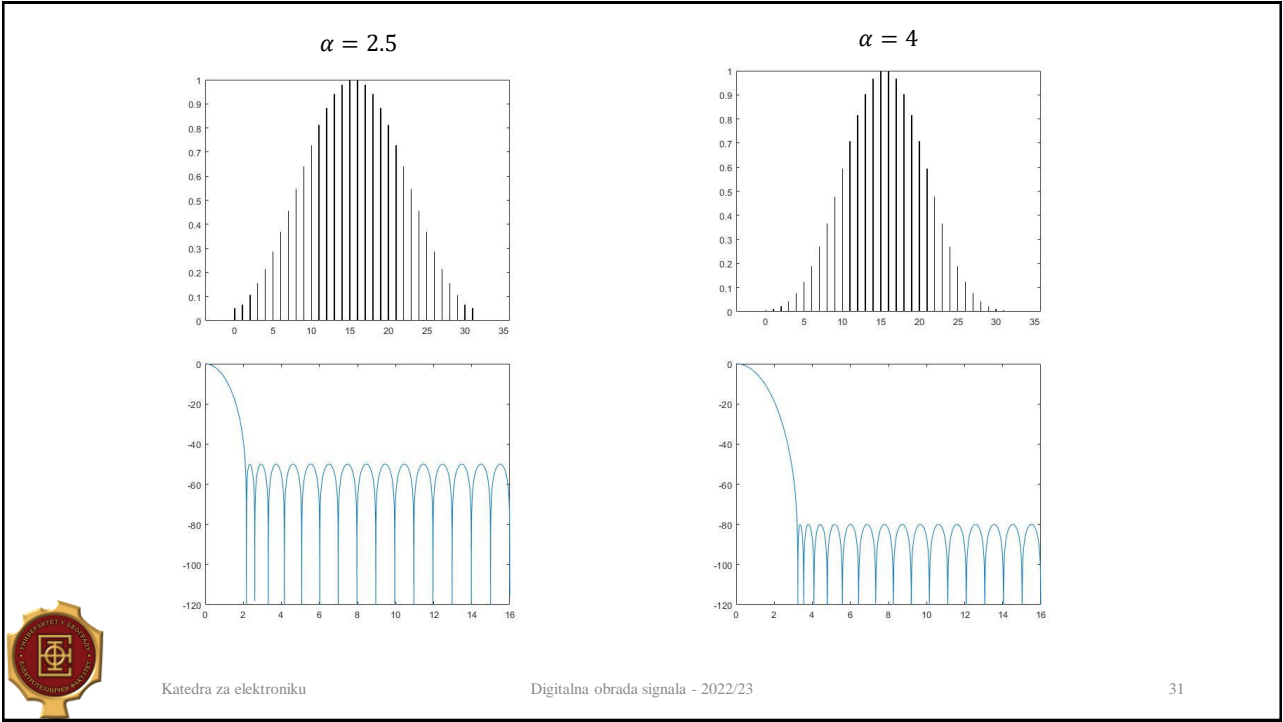
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

α predstavlja logaritam amplituda jednakih bočnih lukova.

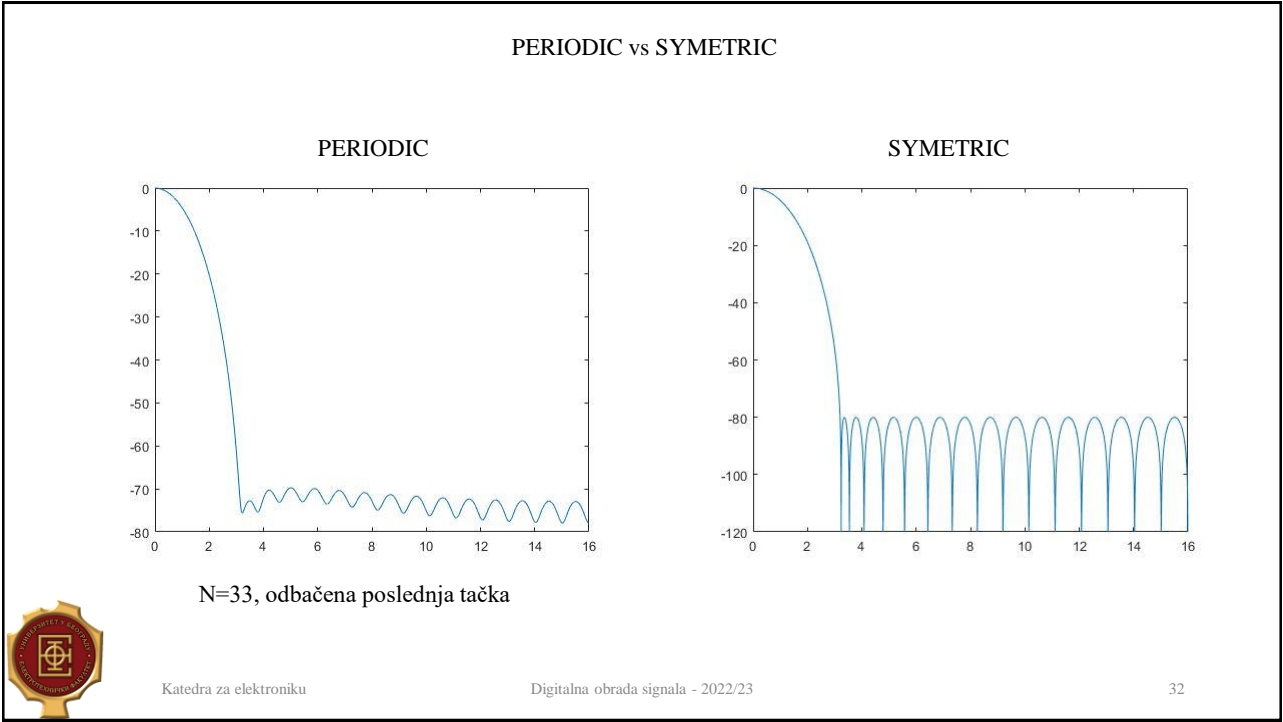
Slabljenje bočnih lukova -20α u dB

Odbirci Dolf-Čebiševljeve prozorske funkcije u vremenskom domenu, $w[n]$, se dobijaju primenom inverzne DFT na odbirke $W[k]$, posle čega se vrši skaliranje da bi maksimalna amplituda bila jednaka 1.





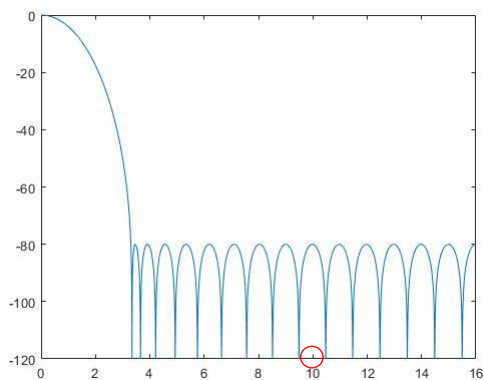
31



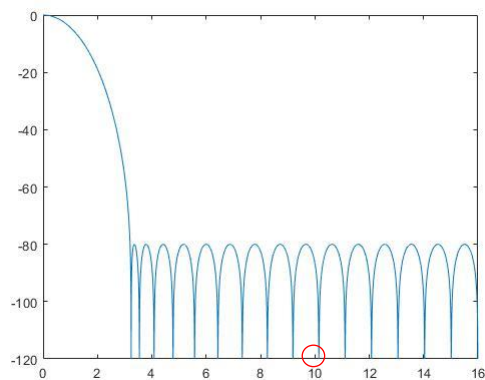
32

PERIODIC vs SYMETRIC

PERIODIC



SYMETRIC



N=31, dodata nula na kraj



Važna napomena

Prilikom crtanja spektara prozorskih funkcija koherentno pojačanje je normalizovano na 0 dB.

Prozorske funkcije imaju različita koherentna pojačanja

Pravougaona	1.00
Trougaona	0.50
Hanova	0.50
Hemingova	0.54
Blekmanova	0.42
Blekman-Harisovala	0.45 (tri člana)
Flat Top	0.22
Kajzerova	0.49 ($\beta = 2\pi$)
Dolf Čebiševljevala	0.53 ($\alpha = 2.5$)

I njihova primena će uticati na to kolike harmonijske amplitude vidite u spektru.

Vodite računa o tome.

Bilo tako što ćete uraditi korekciju u vremenskom domenu odmeraka prozorske funkcije, bilo tako što ćete odmercima „dodavati“ to što ste praktično oduzeli primenom prozorske funkcije.



Prozor	Bočni lukovi	Opadanje lukova	Koherentno pojačanje	ENBW	BW (-3 dB)	Scalloping slabljenje
Pravougaoni	- 13	- 6	1.00	1.00	0.89	3.92
Trougaoni	- 27	- 12	0.50	1.33	1.28	1.82
sin (x)	- 23	- 12	0.64	1.23	1.20	2.10
Hanov	- 32	- 18	0.50	1.50	1.44	1.42
Hemingov	- 43	- 6	0.54	1.36	1.30	1.78
Blekmanov	- 58	- 18	0.42	1.73	1.68	1.1
Blekman-Haris (3 člana)	- 61	- 6	0.45	1.61	1.56	1.27
Blekman-Haris (3 člana)	- 67	- 6	0.42	1.71	1.66	1.13
Blekman-Haris (4 člana)	- 74	- 6	0.40	1.79	1.74	1.03
Blekman-Haris (4 člana)	- 92	- 6	0.36	2.00	1.90	0.83
Kajzerov ($\beta = 2\pi$)	- 46	- 6	0.49	1.50	1.43	1.46
Kajzerov ($\beta = 3.5\pi$)	- 82	- 6	0.37	1.93	1.83	0.89
Dolf-Čebišev ($\alpha = 2.5$)	- 50	0	0.53	1.39	1.33	1.70
Dolf-Čebišev ($\alpha = 4$)	- 80	0	0.42	1.73	1.65	1.10



Koja je najbolja prozorska funkcija?

Pored nabrojanih postoje još

- B-spline windows
- Parzen window
- Welch window
- Nuttall window, continuous first derivative
- Blackman–Nuttall window
- Gaussian window
- Confined Gaussian window
- Approximate confined Gaussian window
- Generalized normal window
- Tukey window
- Planck-taper window
- DPSS or Slepian window
- Ultraspherical window
- Exponential or Poisson window
- Bartlett–Hann window
- Planck–Bessel window
- Hann–Poisson window
- Lanczos window

...

U 95% praktičnih slučajeva Hanov prozor ima zadovoljavajuće karakteristike

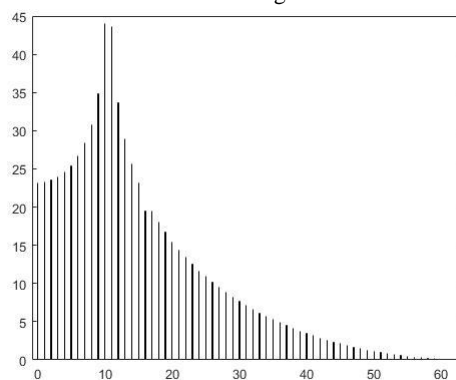
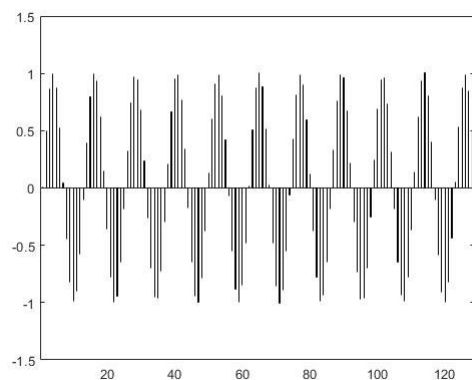


Signal	Prozor
Sinusoidalni ili kombinacija	Han
Sinusoidalni, tačna amplituda	Flat Top
Uskopojasni	Han
Širokopojasni	Pravougaoni, Hemingov
Dva tona bliskih po učestanosti, veoma različitih amplituda	Kajzerov
Dva tona bliskih po učestanosti, sličnih amplituda	Pravougaoni

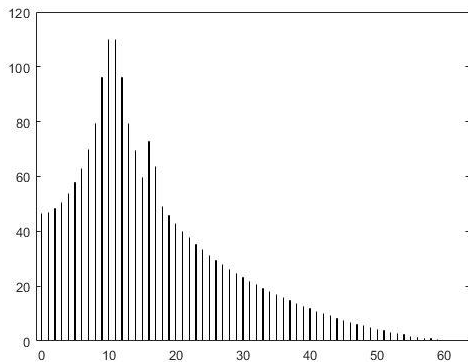


- Primer:
- Signal odabran u 128 tačaka. U signalu postoje dve sinusoidalne komponente:
1. Amplituda 1, na učestanosti $k= 10.5$
 2. Amplituda 0.01 (-40 dB) na učestanosti $k=16$

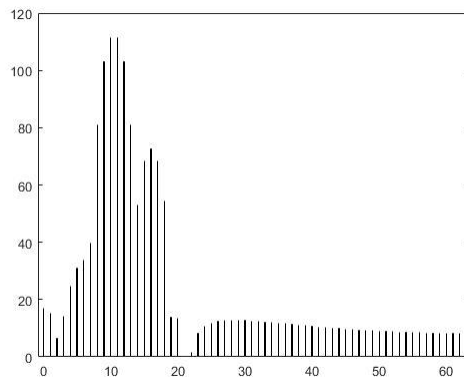
DFT
Pravougaoni



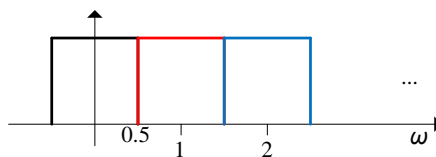
Han



Kajzer



Kako bi trebala da izgleda idealna prozorska funkcija i da ju je moguće napraviti?



1, 2, ... binovi DFTa $\frac{\omega_s}{N}$

Da probamo

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-0.5\frac{\omega_s}{N}}^{+0.5\frac{\omega_s}{N}} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{\omega_s}{N} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_s}{2N} t\right)$$

1. sinc funkcija nije periodična
2. sinc funkcija nie ograničena
3. odabiramo je samo u N tačaka periodom ω_s



$$x(t) = \frac{\omega_s}{N} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_s}{2N} t\right)$$

$$x(nT_s) = \frac{\omega_s}{N} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_s}{2N} nT_s\right) = \frac{\omega_s}{N} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{N} n\right) \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

Digresija – dobili smo približno Lanczos prozorsku funkciju

$$x(nT_s) = \frac{\omega_s}{N} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_s}{2N} nT_s\right) = \frac{\omega_s}{N} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{N} n\right) \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

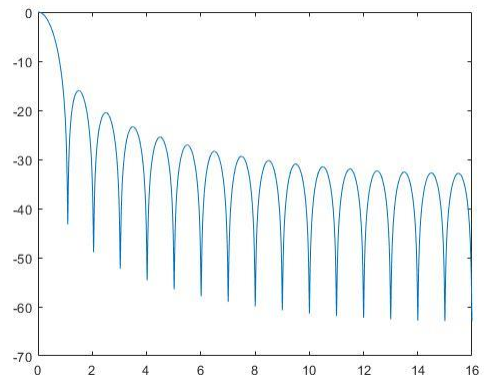
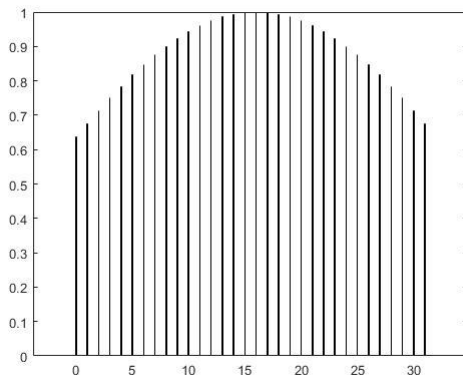
$$\frac{\omega_s}{N} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{N} n\right) \quad n = -\frac{N}{2}, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

$$\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{N}\left(n - \frac{N}{2}\right)\right) = \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{N} n - \frac{\pi}{2}\right) \quad n = 0, \dots, N - 1$$

$$w[n] = \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{N} n - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sinc}\left(\pi\left(\frac{n}{N} - \frac{1}{2}\right)\right) \quad n = 0, \dots, N - 1$$



$$w[n] = \operatorname{sinc}\left(\pi\left(\frac{n}{N} - \frac{1}{2}\right)\right) \quad n = 0, \dots, N - 1$$



$$\text{Lanczos } w[n] = \text{sinc}\left(2 \cdot \pi \left(\frac{n}{N} - \frac{1}{2}\right)\right) = \text{sinc}\left(\pi \left(\frac{2n}{N} - 1\right)\right) \quad n = 0, \dots, N - 1$$

